www.vncold.vn www.vncold.vn www.vncold.vn

NGHIÊN CỨU MỘT THUẬT TOÁN GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH SÓNG NƯỚC NÔNG

THS. NGUYỄN HOÀNG MINH

Tóm tắt: *Báo viết trình bày một thuật toán giải hệ phương trình sóng nước nông (sóng động lực 2 chiều ngang) dựa trên cơ sở phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin biến đổi hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng về dạng hệ các phương trình vi phân thường và giải hệ phương trình vi phân thường với điều kiện biên bằng thuật toán Runge-Kutta và nội suy tuyến tính nối tiếp.*

Summary*: This paper describes methods to solve finite element surface- water schemes two dimensional flow in a horizontal plane.*

Các bài toán ứng dụng trong cơ học chất lỏng như mô phỏng dòng chảy trong vùng đồng bằng ngập lụt, tính toán sóng vỡ đập, nghiên cứu bồi xói lòng dẫn theo đường bờ, ... đã đặt ra yêu cầu nghiên cứu các thuật toán có hiệu quả về tính ổn định và độ chính xác để giải hệ phương trình sóng nước nông. Trong số các thuật toán hiện đang được sử dụng, phương pháp phần tử hữu hạn đang được quan tâm nghiên cứu ở trong và ngoài nước do phương pháp có khả năng mô phỏng không gian với độ chính xác cao. Trong bài báo này chúng tôi sẽ trình bày dưới đây một thuật toán chi tiết giải hệ phương trình sóng nước nông dựa trên cơ sở xấp xỉ không gian nghiên cứu bằng các phần tử hữu hạn, sử dụng hàm nội suy không gian tuyến tính để đưa hệ phương trình đạo hàm riêng về dạng hệ các phương trình vi phân thường và giải hệ phương trình vi phân thường phi tuyến tính bằng sơ đồ Runge-Kutta.

Hệ phương trình sóng nước nông được xây dựng bằng cách tích phân theo chiều sâu dòng chảy hệ phương trình Navier-Stoke với dòng chảy không nén được:

- Phương trình liên tục:

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (Uh)}{\partial x}+\frac{\partial (Vh)}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial h}{\partial t}+U\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial h}{\partial y}+h\frac{\partial V}{\partial y}=0$$

- Phương trình động lượng:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+g\frac{\partial h}{\partial x}=g\left(S_{ox}-S_{fx}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}+g\frac{\partial h}{\partial y}=g\left(S_{oy}-S_{fy}\right)$$

Trong đó:

U, V- Vận tốc được trung bình hoá theo độ sâu ứng với trục ox, oy tương ứng;

h - Độ sâu lớp dòng chảy;

S_{ox}, S_{oy} - Độ dốc đáy theo trục ox, oy tương ứng;

τ_{ox}, τ_{oy} - ứng suất tiếp theo hướng ox và oy;

S_{fx}, S_{fy} - là độ dốc thuỷ lực (độ dốc cản) theo hướng ox và oy tương ứng, trong trường hợp chảy rối được xác định theo công thức Manning như sau:

www.vncold.vn www.vncold.vn www.vncold.vn

$$S_{fx} = \frac{U\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2.h} \text{ và } S_{fy} = \frac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{C^2.h}$$

Trong đó: C - Hệ số Sêdi

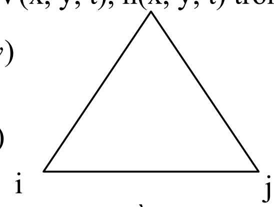
Theo phương pháp phần tử hữu hạn, khu vực tính toán được chia thành các phần tử. Các phần tử có thể là hình tam giác, tứ giác đều hoặc không đều có kích thước khác nhau và số lượng nút khác nhau [8, 9]. Trong trường hợp tổng quát, các phần tử tam giác với 3 điểm nút thường được lựa chọn (hình 1).

Các ẩn hàm U(x, y, t), V(x, y, t), h(x, y, t) trong mỗi phần tử được xấp xỉ như sau:

$$U(x,y,t) \approx \sum_{i=1}^{N} U_i(t) F_i(x,y)$$

$$V(x,y,t) \approx \sum_{i=1}^{N} V_i(t) F_i(x,y)$$

$$h(x,y,t) \approx \sum_{i=1}^{N} h_i(t) F_i(x,y)$$



Hình 1. Phần tử tam giác

$$F_i = \frac{1}{2\Delta}\left(a_i + b_i x + c_i y\right)$$

Phương pháp số dư trọng số Galerkin thể hiện như sau:

$\int_D F_i R \, dD = 0$ (3)

Trong đó: D: khối chứa các phần tử; *R*: số dư khi xấp xỉ các biến số đồng thời phụ thuộc không gian-thời gian bằng tổng các hàm số thời gian và không gian riêng rẽ.

Như vậy, *Phương pháp Garlekin cho rằng số dư xuất hiện khi mô phỏng không gian bằng các phần tử hữu trực giao với các hàm trọng số nội suy. Hay nói một cách khác bản chất của phương pháp Garlekin là với hàm trọng số được lựa chọn, tổng sai số mô phỏng theo không gian trên toàn miền bằng không.*

Áp dụng phương pháp Galerkin cho hệ phương trình (1), (2) đối với phần tử i thu được:

Hệ phương trình (4) sau khi được tích phân số, được viết như sau:

$$\sum_{1}^{Ne} \left\{ A_{ij} \frac{dU_i}{dt} + B_{ij} U_i + D_i^x h_i + N_1 \left(S_{ox} - S_{fx}\right)_i \right\} = 0$$

$$\sum_{1}^{Ne} \left\{ A_{ij} \frac{dV_i}{dt} + B_{ij} V_i + D_i^y h_i + N_1 \left(S_{oy} - S_{fy}\right)_i \right\} = 0$$

$$\sum_{1}^{Ne} \left\{ A_{ij} \frac{dh_i}{dt} + B_{ij}^x U_i + B_{ij}^y V_i + B_{ij} h_i \right\} = 0 \quad (3)$$

Trong đó: Ne là số phần tử trên miền tính Ω .

Các hệ số được xác định theo các biểu thức sau:

Dễ nhận thấy rằng tích phân Galerkin (3) đưa hệ phương trình đạo hàm riêng (1), (2) về dạng hệ các phương trình vi phân thường. Hệ phương trình (5) sau khi tổng hợp cho tất cả các phần tử thuộc vùng nghiên cứu có dạng phương trình ma trận:

$$\frac{d\{W\}}{dt} = \{T\} - [C]\{W\} \qquad (4)$$

www.vncold.vn www.vncold.vn www.vncold.vn

Phương trình (5) với điều kiện ban đầu $\{W\}_{t=0}$ và điều kiện biên $\{W\}_{\Gamma=0}$ được giải theo thuật toán Runge-Kutta bậc m [6, 7] và kiểm tra lại biên theo phương pháp nội suy tuyến tính nối tiếp (successive linear interpolation):

Bước 1: Giải hệ phương trình (6) theo Runge-Kutta

$$\Delta W^{(1)} = \{T\}^{(o)}\Delta t - [C]^{(o)}\{W(t)\}\Delta t$$

$$\Delta W^{(2)} = \{T\}^{(1)}\Delta t - [C]^{(1)}\{W(t) + \frac{\Delta W^{(1)}}{n}\}\Delta t$$

$$\Delta W^{(3)} = \{T\}^{(2)}\Delta t - [C]^{(2)}\{W(t) + \frac{2\Delta W^{(2)}}{n}\}\Delta t$$

....

$$\Delta W^{(m)} = \{T\}^{(m-1)}\Delta t - [C]^{(m-1)}\{W(t) + \frac{(m-1)\Delta W^{(m-1)}}{n}\}\Delta t \quad (7)$$

- Ẩn cần tìm sau khoảng thời gian Δt thu được có dạng

$$W_i(t+\Delta t) = W_i(t) + \Delta W_i$$

Trong đó:

- ΔW_i là nghiệm ngoại suy:

$$\Delta W_i = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \Delta W^{(k)}$$

γ_k là các trọng số ngoại suy tùy theo việc chọn bậc m = 3 hoặc m = 6.

Bước 2: Giải bài toán biên (phương pháp nội suy tuyến tính nối tiếp- successive linear interpolation) [6] :

Tại biên, với điều kiện biên $\overline{W}_{\Gamma=0} = \overline{W(t)}$ cho trước, đặt:

$$W_\Gamma(t+\Delta t) = W_{(k)}(t+\Delta t) = \overline{W}_k(t+\Delta t)$$

Xét hàm sai số tại biên:

$$f_{(k)}(W) = (W_{(k)} - \overline{W}_\Gamma)^2$$

(i) Nếu: $f_{(k)}(W) > \varepsilon$ ước tính:

Gán: $W_\Gamma(t+\Delta t) = W_{(k)}$ trở về bước 1 tính lại xác định được $W_{(k+1)}$.

Xét hàm sai số tại biên: $f_{(k+1)}(W_{(k+1)}) = (W_{(k+1)} - \overline{W}_\Gamma)^2$

(ii) Nếu: $f_{(k)+1}(W_{(k+1)}) \succ \varepsilon$ ước tính:

www.vncold.vn www.vncold.vn www.vncold.vn

$$W_{(k+2)} = W_{(k+1)} - \frac{f_{(k+1)}(W_{(k+1)})}{(f_{(k)}(W_{(k)}) - f_{(k+1)}(W_{(k+1)})/(W_{(k)} - (W_{(k+1)}))}$$

Gán: $\overline{W}_{\Gamma}(t+\Delta t) = W_{(k+2)}$ trở về Bước 1 tính lại.

(iii) Nếu: $f_{(k+1)}(W_{(k+1)}) < \varepsilon$, ta có : $\overline{W}_{\Gamma}(t+\Delta t) = \overline{W}(t+\Delta t)$ quá trình tính được thực hiện từng bước cho khoảng thời gian tính tiếp theo.

Về cơ bản thuật toán trên là đơn giản, có độ ổn định cao, không khó lập trình so với các sơ đồ sai phân khác đã có do vậy có thể ứng dụng để giải quyết các bài toán ngập lụt.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lương Tuấn Anh, Trần Thục (2003): Một phương án nâng cao độ ổn định của sơ đồ phần tử hữu hạn sóng động lực 2 chiều ngang. Tuyển tập báo cáo Hội thảo Khoa học- Viện Khí tượng Thủy văn lần thứ 8, Hà Nội-12/ 2003. Trang 1-5.

2. G.I. Marchuc , V.V. Saidurov (1979): Nâng cao độ chính xác giải các sơ đồ sai phân. NXB Nauka, Mat-xơ-cơ-va. (Tiếng Nga).

3. V. Aizinger, C. Dawson (2002): A Discontinuous Galerkin method for two-dimensional flow and transport in shallow water. Advances in Water Resources 25, 67-84.

4. Forsythe G.E., Malcolm M.A., Moler C.B. (1977): Computer Method for Mathematical Computations. Prentice-Hall (Russian translation from English, 1980).

5. Ventechow, David R. Maidment, Lary W. Mays (1988): Applied Hydrology - Mc Graw - Hill Book Co (Thủy văn ứng dụng, 1994).

www.vncold.vn www.vncold.vn www.vncold.vn